Дәріс 8-9. **Решение задачи по комбинаторике**

Задача 1. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую – 5 и в третью - 12. Сколькими способами это можно сделать.

Решение. Создавая первую бригаду, отбирают 3 человека из 20, создавая вторую – 5 из оставшихся 17, создавая третью – 12 из оставшихся 12. Для выборок важен только состав (роли членов бригады не различаются). Эти выборки – сочетания из n различных элементов по m элементов, их число:

$$C_n^m = n! \setminus m!(n-m)!$$

Создавая сложную выборку (из 3-х бригад), воспользуемся правилом умножения:

$$N=C_{20}^3 \cdot C_{17}^5 \cdot C_{12}^{12} = 7054320.$$

Ответ. 7054320 способов.

Задача 2. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

Решение. Имеем набор {я, я, г, г, г}. Всего перестановок пятиэлементного множества 5!, но мы не должны учитывать перестановки, в которых объекты одного типа меняются местами несколько раз, поэтому нужно поделить на возможное число таких перестановок: $2! \cdot 3!$.

Получаем в итоге $5! /2! \cdot 3! = 3 \cdot 4 \cdot 5/ 2 \cdot 3 = 10$.

Ответ: 10 способов.

Задача 3. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

Решение. Имеем 14 претендентов и 13 рабочих мест. Сначала выберем работников на первую специальность, то есть 4 женщин из 6: $C_6^4= 6! \setminus 4! \cdot 2! = 15$.

Далее независимо аналогичным образом выберем мужчин на вторую специальность:

$$C_8^6= 8! \setminus 6! \cdot 2= 28.$$

Осталось 2 женщины, 2 мужчин и 3 вакантных места, которые, по условию, могут занять любые из четырех оставшихся человек. Это может быть сделано 2 вариантами:

1. 1 женщина и 2 мужчин (выбираем женщину $C_2^1= 2$ способами)
2. 1 мужчина и 2 женщины (выбираем мужчину $C_2^1= 2$ способами). В итого получаем

$$15 \cdot 28(2 + 2) = 1680 \text{ способов}.$$

Ответ: 1680 способов.

Задача 4. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

Решение. Так как все пассажиры должны ехать в разных вагонах, требуется отобрать 4 вагона из 9 с учетом порядка (вагоны отличаются №), эти выборки – размещения из n различных элементов по m элементов, где n=9, m=4. Число таких размещений находим по формуле:

$$A_n^m = n \cdot(n -1)(n -2)\cdot\ldots \cdot(n - m + 1).$$

Получаем: $A_9^8 =9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6=3024$.

Ответ. 3024 способами можно рассадить в поезде 4 человека.

Задача 5. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

Решение. Не менее 2-х человек, т.е 2+7 или 3+6 или 4+5 человек (5+4, 6+3, 7+2 – те же самые комбинации). В каждой выборке важен только состав, т.к. члены подгруппы не различаются по ролям, т.е. выборки − сочетания из n различных элементов по m элементов, их число:

$$C_n^m=n! \setminus m!(n-m)!.$$

Число выборок из 2-х человек: $C_9^2=9! \setminus 2! \cdot 7!=36$.

Число выборок из 3-х человек: $C_9^3=9! \setminus 3! \cdot 6! = 84$.

Число выборок из 4-х человек: $C_9^4=9! \setminus 4! \cdot 5!=126$.

Применяем правило сложения: $C_9^2 + C_9^3 + C_9^4= 246$ способов.

Ответ. 246 способов.

Задача 6. Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

Решение. Так как известно, что двое мальчиков войдут в команду, то остается отобрать 3 из 8. Для выборки важен только состав (по условию все члены команды не различаются по ролям).

Следовательно, выборки – сочетания из n различных элементов по m элементов, их число:

$$C_n^m=n! \setminus m!(n-m)!.$$

При n=8, m=3 $C_8^3= 56$. Ответ. 56 способов сформировать команду

Задача 7. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

Решение.

Способ 1. В одной игре участвуют 2 человека, следовательно, нужно вычислить, сколькими способами можно отобрать 2-х человек из 15, причем порядок в таких парах не важен. Воспользуемся формулой для нахождения числа сочетаний (выборок, отличающихся только составом) из n различных элементов по m элементов C_n^m=n!\m!(n-m)!, при n=15, m=2 C_{15}^2=105.

В процессе решения исключили 13! из 15!, т.е. сократили произведение 15! = 1· 2 ·3·...·15 на 13! = 1· 2 · 3·...·13, остались после сокращения множители 14 и 15.

Способ 2. Первый игрок сыграл 14 партий (с2-м, 3-м, 4-м, и так до 15-го), 2- ой игрок сыграл 13 партий (3-м, 4-м, и т.д. до 15-го, исключаем то, что с первым партия уже была), 3-ий игрок − 12 партий, 4-ый − 11 партий, 5 – 10 партий, 6 – 9 партий, 7 – 8 партий, 8 – 7 партий, 9 – 6 10 – 5 11 – 4 12 – 3 13 – 2 14 – 1, а 15-ый уже играл со всеми. Итого: 14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=105 партий

Ответ. 105 партий.

Задача 8. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили 2 различных числа? Сколько среди них будет правильных дробей?

Решение. Различных дробей из 6 чисел: 3, 5, 7, 11, 13, 17 можно составить $C_6^2 \cdot 2$=30 штук (C_6^2 способами выбираем два числа из 6, и двумя способами составляем из них дробь: сначала одно число – числитель, другое знаменатель и наоборот). Из этих 30 дробей ровно 15 будут правильные (т.е., когда числитель меньше знаменателя): C_6^2=15 способами выбираем два числа из 6, и единственным образом составляем дробь так, чтобы числитель был меньше знаменателя. Ответ. 30; 15.

Задача 9. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове Гора и Институт?

Решение. 1) В слове «гора» четыре буквы, все они различны, поэтому можно получить всего N_1=4!=24 различных слова.

2) В слове «институт» 8 букв, из них две буквы «и», три буквы «т» и по одной букве «н», «с» и «у». Поэтому всего можно получить перестановками букв

N_2= 8! \ 2!3!1!1!1! =3360 различных слов. Ответ. 24 и 3360 слов.

Задача 10. Каких чисел от 1 до 1000000 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в которых она не встречается?

Решение. Подсчитаем количество чисел от 1 до 999999 (число 1 000 000 содержит единицу, его сразу отбросим), в записи которых нет единиц. Каждую цифру можно выбрать 9 способами (любая цифра кроме 1), поэтому все 6 цифр (по правилу произведения) можно выбрать 6 9 способами (если в числе до значащих цифр стоят нули, мы их просто отбрасываем). При этом один вариант (000000) нужно убрать, так как число 0 не рассматривается. Получаем всего N = 9^6-1=531440 чисел. Так как всего чисел 1000000, то видно, что чисел без единицы среди чисел от 1 до 1000000 больше, чем тех, в записи которых единица есть.

Задача 11. Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

Решение: В данном случае подсчёт C_{23}^2 не годится, поскольку общее количество сочетаний включает в себя и разнополые пары.

Условие «выбрать двух человек одного пола» подразумевает, что необходимо выбрать двух юношей или двух девушек, и уже сама словесная формулировка указывает на верный путь решения:

$C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ способами можно выбрать 2 юношей;

$C_{13}^2 = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13}{11! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ способами можно выбрать 2 девушек.

Таким образом, двух человек одного пола (без разницы – юношей или девушек) можно выбрать: $C_{10}^2 + C_{13}^2$ = 45+78=123 способами.

Ответ**:** 123.

Задача 12. Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?

Решение: Для наглядности обозначим данное число тремя звёздочками: *******

Комбинации будем считать по разрядам – *слева направо*:

В *разряд сотен* можно записать любую из C_9^1 = 9 цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9). Ноль не годится, так как в этом случае число перестаёт быть трёхзначным.

А вот в разряд десятков («посерединке») можно выбрать любую из 10 цифр: C_{10}^1 = 10.

По условию, число должно делиться на 5. Число делится на 5, если оно заканчивается на 5 либо на 0. Таким образом, в младшем разряде нас устраивают 2 цифры.

Итого, существует: $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2 = 9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ трёхзначных чисел, которые делятся на 5.

При этом произведение $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2$ расшифровывается так: «9 способами можно выбрать цифру *в* разряд сотен и 10 способами выбрать цифру в разряд десятков и 2 способами в разряд единиц»

Или ещё проще: «каждая из 9 цифр в разряде сотен комбинируется с каждой из 10 цифр разряда десятков и с каждой из двух цифр в разряде единиц».

Ответ: 180.

Задача 12. Сколько различных буквосочетаний можно получить перестановкой карточек со следующими буквами: К, О, Л, О, К, О, Л, Ь, Ч, И, К?

Решение: В том случае, если бы все буквы были различны, то следовало бы применить тривиальную формулу P_n, однако совершенно понятно, что для предложенного набора карточек некоторые манипуляции будут срабатывать «вхолостую», так, например, если поменять местами любые две карточки с буквами «К» в любом слове, то получится то же самое слово. Причём, физически карточки могут сильно отличаться: одна быть круглой с напечатанной буквой «К», другая – квадратной с нарисованной буквой «К». Но по смыслу задачи даже такие карточки считаются одинаковыми, поскольку в условии спрашивается о буквосочетаниях.

Всё предельно просто – всего: 11 карточек, среди которых буква:

К – повторяется 3 раза;

О – повторяется 3 раза;

Л – повторяется 2 раза;

Ь – повторяется 1 раз;

Ч – повторяется 1 раз;

И – повторяется 1 раз.

Проверка: 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 11, что и требовалось проверить.

По формуле количества перестановок с повторениями:

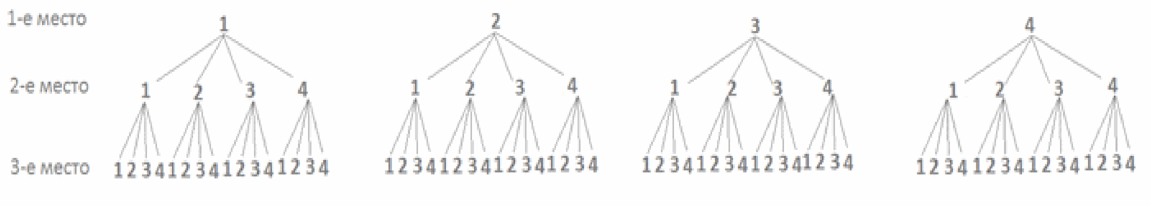
$$P_{11(повт)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!} = \frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{39916800}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 554400$$,

различных буквосочетаний можно получить.

Ответ**:** 554400.

Задача 13.. Сколько трехзначных чисел можно составить из 4 цифр: 1, 2, 3, 4?

Решение. Перечислим с помощью схемы все возможные числа:



Видим, что всего данных чисел $4^3 = 64$, где 4 - количество элементов исходного множества, а 3 — число выбранных элементов.

Задача 14. Сколько четырехзначных чисел можно составить из 9 цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Решение. Цифры в числах могут повторяться, и число зависит от порядка цифр в его записи. Значит, это размещения с повторениями, т.е. кортежи. Их число $\overline{A_9^4} = 9^4 = 6561$.

Задача 15. В чемпионате участвует 12 команд. Сколькими различными способами могут быть распределены три различные медали?

Решение. Это размещения без повторения, т.к. одна команда не может занять два или три места сразу. $A_{12}^3 = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$.

Задача 16. В семье 6 человек. За столом 6 стульев. В семье решили каждый вечер рассаживаться на эти 6 стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?

Решение. Одного человека мы можем посадить только один раз. Значит, имеем перестановки без повторений. Одно размещение от другого может отличаться только порядком размещения людей, т.е. имеем перестановки 6 элементов: $P_6 = 6! = 720$.

Задача 17. Сколькими способами из класса, в котором учатся 30 школьников, можно выбрать капитана команды для математических соревнований и его заместителя?

Решение.

1-й способ: На роль капитана может быть выбран любой из 30 учащихся, а его заместитель – любой из 29 оставшихся учеников. Таким образом, получаем $30 \cdot 29 = 870$ способов.

2-й способ: Порядок важен, тогда по формуле числа размещений имеем $A_{30}^2=\frac{30!}{(30-2)!}=\frac{30!}{28!}=\frac{30\cdot29\cdot28!}{28!}=30\cdot29=870$ способов.

Задача 18. Сколькими способами из класса, в котором учатся 30 школьников, можно выбрать двоих для участия в математической олимпиаде?

Решение.

1-й способ: Нам не важно, кто капитан, а кто заместитель, нам нужны всего лишь два участника, Поэтому получаем, что у нас каждая пара учащихся в произведении повторяется два раза. Поэтому ответом для второй задачи будет (30 · 29) : 2 = 435.

2-й способ: Без учета порядка применим формулу числа сочетаний

$$C_{30}^2=\frac{30!}{(30-2)!2!}=\frac{30!}{28!2!}=\frac{30\cdot29\cdot28!}{28!2}=\frac{30\cdot29}{2}=435$$

.

Задача 19. Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке (все три кнопки нажимаются одновременно), если на нем всего 10 цифр?

Решение. Так как кнопки нажимаются одновременно, то выбор этих кнопок — сочетание. Отсюда возможно $C_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!3!}=\frac{10\cdot9\cdot8}{6}=120$ вариантов.

Задача 20. Три медведя выбегают из дома, догоняя девочку. Сколькими способами они смогут это сделать?

Решение. Порядок выбегания из дома задает нумерацию трех медведей числами 1 2 3. Таких нумераций 3! = 6.

Задача 21. Сколькими способами можно построить пятерых человек в шеренгу?

Решение. По формуле числа перестановок имеем $P_5=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$.

Задача 22. Сколькими способами 4 вора могут по одному разбежаться на все 4 стороны?

Решение. Стороны фиксированы, например юг, север, запад, восток или для простоты 1, 2, 3, 4. Порядок разбегания по ним задает нумерацию 4-х воров числами 1, 2, 3, 4. Таких нумераций имеется 4! = 24.

Задача 23. 11 футболистов строятся перед началом матча. 1-м - обязательно капитан, 2-м - обязательно вратарь, а остальные - случайным образом. Сколько существует способов построения?

Решение. Капитана и вратаря строить не надо, т.к. их места фиксированы. 9 футболистов (все, кроме капитана и вратаря) надо расставить на 9 мест - с 3-го по 11-е. Всего имеется 9!=362880 таких перестановок.

Задача 24. В классе 27 учеников, из которых нужно выбрать троих. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) 1-й ученик должен решить задачу, 2-й - сходить за мелом, 3-й - пойти дежурить в столовую;

б) им следует спеть хором?

Решение.

а) порядок важен: $A_{27}^3 = 27\cdot26\cdot25 = 17\,550$;б) порядок неважен: $C_{27}^3 = (27\cdot26\cdot25) / (3\cdot2) = 2\,925$.

Задача 25. В классе 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории возле школы нужно 4 мальчика и 3 девочки. Сколькими способами можно их выбрать со всех учеников класса?

Решение. Сначала отдельно выберем 4 мальчика из 16 и 3 девочки из 12. Так как порядок размещения не учитывается, то соответственные соединения – сочетания без повторений. Учитывая необходимость одновременного выбора и мальчиков, и девочек, используем правило произведения. В результате число способов будет вычисляться таким образом:

$$C_{16}^4\cdot C_{12}^3=(16!/(4!\cdot12!))\cdot(12!/(3!\cdot9!))=((13\cdot14\cdot15\cdot16) / (2\cdot3\cdot4))\cdot((10\cdot11\cdot12) / (2\cdot3))=400400.$$

Задача 26. В библиотечной полке стоят 30 книг, причем 27 - книги разных авторов и еще 3 книги одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги так, чтобы книги одного автора стояли рядом друг с другом?

Решение. Временно объединим три книги одного автора в один объект, всего получим 28 объектов. Для них число перестановок будет P_{28}. Теперь три книги переставим между собой P_3 способов. По правилу произведения получаем, что число способов расставить книги равно: $P_{28}\cdot P_3=3!\cdot28!$.

Задача 27. В ящике лежат 70 шаров: 20 красных, 20 синих, 20 желтых, остальные черные и белые. Какое наименьшее число шаров надо взять, не видя их, чтобы среди них гарантированно оказалось не меньше 10 шаров одного цвета?

Решение. Если мы вытащим 38 шаров, то со 100%-ной вероятностью обнаружим среди них 10 одинаковых. Действительно, допустим сначала мы вытаскивали чёрные и белые (10 штук), потом начали вытаскивать по очереди красный, потом синий, потом жёлтый, чтобы было шаров красного, синего и жёлтого цветов поровну, но меньше 10, то есть 3(цвета)·9=27 (уже 37), и последний (38-ой) уже по любому или красный, или синий, или жёлтый. Ответ: 38.

Задача 28. Полоска 1x10 разбита на единичные квадраты. В квадраты записывают числа 1, 2. …, 10. Сначала в один какой-нибудь квадрат пишут число 1, затем число 2 записывает в один из соседних квадратов, затем число 3 - в один из соседних с уже занятыми и т.д. (произвольными являются выбор первого квадрата и выбор соседа на каждом шагу). Сколькими способами это можно проделать?

Решение. Пусть 1 стоит в i-м слева квадрата полосы. Расстановка остальных чисел однозначно определяется набором чисел, стоящих левее 1. Таких наборов ровно C_9^{i-1} (так как в каждом наборе фиксирован порядок чисел), а общее количество способов равно6

$$C_9^0\cdot C_9^1\cdot C_9^2\cdot C_9^3\cdot C_9^4\cdot C_9^5\cdot C_9^6\cdot C_9^7\cdot C_9^8\cdot C_9^9=2^9=512 \text{ способов.}$$

Задача 29. 6 ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров?

Решение. Рассмотрим ряд из 25 предметов: 200одинаковых шаров и 5 одинаковых перегородок, расположенных в произвольном порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует некоторому способу раскладки шаров по ящикам: в первый ящик попадают шары, расположенные левее первой перегородок, во второй - расположенные между первой и второй перегородками и т.д. (между какими-то перегородками шаров может и не быть). Поэтому число способов раскладки шаров по ящикам равно числу различных рядов из 20 шаров и 5 перегородок, т.е. равно C(25, 5) - ряд определяется теми пятью местами из 25, на которых стоят перегородки.

Задача 20. В ящике перемещены яблок трех сортов. Каково наименьшее количество яблок, которое надо взять наугад из ящика, чтобы среди них вынутых яблок оказалось хотя бы 2 яблока одного сорта; хотя бы 3 яблока одного сорта?

Решение. Количество предметов в таком случае можно вычислить по формуле: p=k(n-1)+1, где p - необходимое количество предметов, k - количество вариантов предметов (k=3 - количество сортов яблок), n - необходимое количество предметов одного из вариантов (n=2 и 3).

При n=2. p=k(n-1)+1=3(2-1)+1 =4,

При n=3. p=k(n-1)+1=3(3-1)+1=7.

Задача 21. Попробуйте понять, по какому правилу сформирована нижеуказанная числовая последовательность:

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
1113213211
………………………….
………………………….

Решение. Каждое следующие число описывает одно предыдущее. Например: Число во второй строке «11» говорит, что в предыдущей строке одна единица или 1 и 1), число в третьей строке «21» говорит, что в предыдущей строке две единицы или 2 и 1, число в четвертой строке говорит, чтов предыдущей строке одна двойка и одна единица или 1(одна)21(одна)1. И так далее.

Задача 22. Сколько одночленов окажется в многочлена

$(1+x^3+x^6+///+x^{30})(1+x^5+x^{10}+///+x^{30})$, после раскрытия скобок и приведения подобных членов?

Решение. Раскроем скобки и не приведя подобные члены, выпишем в таблицу все получающиеся степени одночленов. Первая строка таблицы - это степени, получающиеся при умножении первого многочлена на первое слагаемого второго многочлена, вторая строка - это степени, получающиеся при умножении первого многочлена на второе слагаемого второго многочлена и т.д.

0	3	6	9	12	**15**	**18**	**21**	**24**	**27**	**30**
5	8	11	14	17	**20**	**23**	**26**	**29**	**32**	**35**
10	13	16	19	22	**25**	**28**	**31**	**34**	**37**	**40**
15	**18**	**21**	**24**	**27**	**30**	**33**	**36**	**39**	**42**	**45**

20	**23**	**26**	**29**	**32**	**35**	38	41	44	47	50
25	**28**	**31**	**34**	**37**	**40**	43	46	49	52	55
30	**33**	**36**	**39**	**42**	**45**	48	51	54	57	60

Всего в таблице 77 чисел, из них 24 входят в таблицу более одного раза. Следовательно, после приведения подобных членов получится 77 -24=53 одночлена.

Задача 23. Сколько пар натуральных чисел удовлетворяет равенству 2x+21y=90000?

Решение. Переписав данное равенство в виде 2x=90000-5y, заметим, что правая часть делится на 5, а тогда левая часть, т.е. 2x также делится на 5, значит, x делится на 5, т.е. x=5n для некоторого натурального n. Аналогично, y=2k для некоторого натурального k.

Теперь исходное равенство примет вид 10n+10k=90000, n+k=9000.

Спрашивается сколько пар (n, k) удовлетворяют полученному равенству? Понятно, что n принимает значения от 1 до 8999. Число k однозначно определяется выбором n (поскольку k=9000n). Следовательно, имеется 8999 пар чисел (n, k). Значит, искомое количество пар (x, y) также равно 8999.

Решение задач про выбор шаров из урны

Общая постановка задачи примерно следующая:

В урне находится K белых и N−K чёрных шаров (всего N шаров). Из нее наудачу и без возвращения вынимают n шаров. Найти вероятность того, что будет выбрано ровно k белых и n−k чёрных шаров.

По классическому определению вероятности, искомая вероятность находится по формуле гипергеометрической вероятности: $P=C_k^K\cdot C_{N-K}^{n-k}\backslash C_N^n$.(1)

Примеры решений задач о выборе шаров

Пример 1. В урне 10 белых и 8 черных шаров. Наудачу отобраны 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно 2 белых шара.

Подставляем в формулу (1) значения: K=10, N−K=8, итого N=10+8=18, выбираем n=5 шаров, из них должно быть k=2 белых и соответственно, n−k=5−2=3 черных. Получаем:

$$P=C_{10}^2\cdot c_8^3\backslash C_{18}^5=45\cdot 56\backslash 8568=5\backslash 17=0{,}294.$$

Пример 2. В урне 5 белых и 5 красных шаров. Какова вероятность вытащить наудачу оба белых шара?

Здесь шары не черные и белые, а красные и белые. Но это совсем не влияет на ход решения и ответ. Подставляем в формулу (1) значения: K=5 (белых шаров), N−K=5 (красных шаров), итого N=5+5=10 (всего шаров в урне), выбираем n=2 шара, и з них должно быть k=2 белых и соответственно, n−k=2−2=0 красных. Получаем:

$$P=C_5^2\cdot C_5^0\backslash\ C_{10}^2=10\cdot 1\backslash 45=2\backslash 9=0{,}222.$$

Пример 3. В корзине лежат 4 белых и 2 черных шара. Из корзины достали 2 шара. Какова вероятность, что они одного цвета?

Решение, Здесь задача немного усложняется, и решим мы ее по шагам. Введем искомое событие A= (Выбранные шары одного цвета)=(Выбрано или 2 белых, или 2 черных шара). Представим это событие как сумму двух несовместных событий: $A=A_1+A_2$,где A_1 (Выбраны 2 белых шара),A_2 (Выбраны 2 черных шара).

Выпишем значения параметров: K=4 (белых шаров), N−K=2 (черных шаров), итого N=4+2=6 (всего шаров в корзине). Выбираем n=2 шара.

Для события A_1 из них должно быть k=2 белых и соответственно, n−k=2−2=0 черных. Получаем:

$$P(A_1)=C_4^2\cdot C_6^0\backslash C_6^2=6\cdot 1\backslash 15=2\backslash 5=0{,}4.$$

Для события A_2 из выбранных шаров должно оказаться k=0k=0 белых и n−k=2n−k=2черных. Получаем:

$$P(A_2)=C_4^0\cdot C_2^2\backslash\ C_6^2=1\cdot 1\backslash 15=1\backslash 15.$$

Тогда вероятность искомого события (вынутые шары одного цвета) есть сумма вероятностей этих событий:

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=2\backslash 5+1\backslash 15=7\backslash 15=0{,}467.$$

Пример 4. В ящике 4 шара. Могут быть: только белые, только черные или белые и черные. (Состав неизвестен).

Решение:

A – вероятность появления белого шара

а) Все белые:

$P(A)=\frac{1}{3}$ (вероятность того, что попался один из трех вариантов, где есть белые)

$P(B_1)=\frac{4}{4}=1$ (вероятность появления белого шара, где все белые)

$P(AB_2)=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$

б) Вытащили, где все черные

$P(A)=\frac{1}{3}$

$P(B)=\frac{0}{4}=0$

$P(AB)=\frac{1}{3}\cdot 0=0$

в) вытащили вариант, где все белые или/и черные

$P(A)=\frac{1}{3}$

$P(B)=\frac{1}{4}$ - хотя бы один из них белый

$P(AB)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

$P(A)=P_а+P_б+P_в=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{4+1}{12}=\frac{5}{12}$

Пример 5. . В урне 5 белых и 4 черных шара. Из нее вынимают подряд 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение:

5 белых, 4 черных шара

$P(A_1)$ – вынули белый шар

$P(A_1)=\frac{5}{5+4}=\frac{5}{9}$

$P(A_2)$ – вероятность того, что второй шар тоже белый

$P(A_2)=\frac{5-1}{9-1}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

P(A) – подряд выбрали белые шары

$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)=\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{18}$

Пример 6. В пачке 2 фальшивых и 8 настоящих денежных купюр. Из пачки вытянули 2 купюры подряд. Найти вероятность что обе они фальшивые.

Решение: P(2) = 2/10*1/9 = 1/45 = 0.022.

Пример 7. Имеется 10 урн. В 9 урнах по 2 черных и 2 белых шара. В 1 урне 5 белых и 1 черный. Из урны, взятой наугад, вынули шар.

Решение: P(A) - ? белый шар взят из урны, где 5 белых

B – вероятность того, что вынули из урны, где 5 белых

$P(B)=\frac{1}{10}$, $P(\bar{B})=\frac{9}{10}$ - вынули из других

C_1 – вероятность появления белого шара в 9 ур.

$P(C_1)=\frac{2}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

C_2 – вероятность появления белого шара, где их 5

$P(C_2)=\frac{5}{6}$

$P(A_0)= P(B_1)\ P(C_1)\ P(B_2)\ P(C_2)$

$P(A_0)=\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{6}+\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{2}=0{,}53$ - полная вероятность

$P(A)=\frac{P(B_1)\cdot P(C_1)}{P(A_0)}=\frac{0{,}083}{0{,}53}\approx 0{,}157$

Задача 1. В ящике имеется 12 одинаковых шаров, отличающихся только цветом: 6 красных, 3 белых, 2 зелёных и 1 чёрный.

Какое наименьшее число шаров нужно взять из ящика наугад, чтобы среди вынутых шаров оказалось:

А) не менее 2 шаров одного (любого) цвета?

Б) хотя бы 3 шара одного цвета?

В) хотя бы один красный шар?

Г) хотя бы 2 белых шара?

(а) 5 шаров, б) 8 шаров, в) 7 шаров, г) 11 шаров).

Задача 2. В ящике 3 чёрных и 5 белых шаров. Какое наименьшее число шаров нужно взять из ящика, чтобы среди вынутых шаров оказался:

А) хотя бы 1 чёрный,

Б) хотя бы 1 белый?

а) 6, б) 4

Задача 3. В пакете перемешаны конфеты трёх сортов, не различимые на ощупь.

Какое наименьшее число конфет надо взять наугад из пакета, чтобы среди вынутых было:

А) хотя бы 2 конфеты одного сорта?

Б) хотя бы 3 конфеты одного сорта?

(а) 4, б) 7.

Задача 4. Мои четыре пары перчаток одного фасона: две пары – чёрных, а две – серых, лежали на полке в тёмной комнате.

Какое наименьшее число перчаток я должен взять наугад, чтобы обеспечить себя парой перчаток одного цвета, безразлично какого?

Ответ: 5

Задача 5. В классе 35 учеников. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной и той же буквы?

Ответ: да.

Задача 6. В пионерском отряде 22 пионера. Можно ли утверждать, что среди пионеров найдутся хотя бы два ученика, имена которых начинаются с одной и той же буквы?

Ответ: нет.

Задача 7. В школе 400 учеников. Почему среди учащихся этой школы обязательно найдутся хотя бы два ученика, родившихся в один и тот же день года?

Ответ: В году на более 366 дней, а учащихся – 400)

Задача 8. В школе 735 учащихся. Почему можно утверждать, что по крайне мере 3 ученика должны отмечать день своего рождения в один и тот же день?

Задача 9. Почтовое отделение приняло у населения 200 посылок с яблоками. Известно, что ящик не может вмещать более 60 яблок. Докажите, что по крайне мере 4 посылки содержат одинаковое количество яблок.

Задача 10. У открытого окна стояли 3 вазы с розами. В белой вазе было в 2 раза, а в синей – в 3 раза больше цветов, чем в красной. Ветром опрокинуло 1 вазу, и она разбилась. Пять роз осыпалось. Остальные поставили поровну в синюю и вторую уцелевшую вазу.

Какого цвета ваза разбилась?

(красная, т. к. в белой было чётное число роз).

Задача 11. Аркадий, Борис, Владимир и Григорий перетягивали канат. Хотя и с трудом, но Борис мог перетянуть Аркадия и Григория вместе взятых. Если с одной стороны становились Борис и Аркадий, а с другой – Владимир и Григорий, то ни та , ни другая пара не могла перетянуть канат на свою сторону.

Но если Григорий и Аркадий менялись местами, Владимир и Аркадий легко побеждали противников.

Кто из них был самый сильный, кто занимал второе место, кто третье, кто самый слабый?

(Самый сильный – Владимир, за ним идут Борис, Аркадий и Григорий).

Задача 12. У Алексеева и Смирнова по 2 сына, каждому из которых меньше 9 лет. В обеих семьях одному мальчику больше 5 лет, а другому меньше 5 лет. Известно, что Аркадий на 3 года моложе своего брата. Борис – самый старший среди мальчиков. Клим вдвое моложе младшего сына Алексеева. Дима на 5 лет старше младшего сына Смирнова.

Назовите имена и фамилии мальчиков и укажите сколько лет каждому из них.

(Борис Смирнов -8 лет, Дима Алексеев – 7 лет, Аркадий Алексеев – 4 года, Клим Смирнов – 2 года).

Задача 13. В пруду плавало 6 гусей и 8 уток. 7 птиц вышли на берег. Был ли среди них хотя бы 1 гусь? Хотя бы 1 утка?

Задача 14. В корзине лежат яблоки двух сортов. Наугад берут из этой корзины несколько яблок. Какое наименьшее количество яблок нужно взять, чтобы среди них оказались хотя бы два яблока одного сорта? (3 яблока)

Задача 15. В коробке лежат 4 шарика красного цвета и 5 шариков голубого цвета. Какое наименьшее количество шариков надо взять, не выбирая, чтобы среди них было 2 шарика разного цвета?

Задача 16. В мешочке 10 белых и 7 красных шариков. Если наугад достать 8 шариков , то попадётся ли:

а) хотя бы один красный;

б) хотя бы один белый?

Задача 17. В мешочке лежат 4 красных и 3 синих шарика. Сколько шариков нужно вынуть из мешочка наугад, чтобы среди них:

а) был 1 синий шарик;

б) были 2 шарика разного цвета,

в) не было ни одного красного шарика;

г) не было ни одного синего шарика?

Задача 18. В мешочке лежат 3 красных и 3 жёлтых шарика. Сколько шариков нужно вынуть из мешочка наугад, чтобы быть уверенным в том, что;

а) хотя бы один из вынутых шариков будет красным;

б) будут 2 шарика разного цвета;

в) не будет ни одного шарика красного цвета;

г) будут 2 жёлтых шарика?

Задача 19. В мешочке лежат 3 красных и 3 жёлтых кружка. Наугад достали 4 кружка. Что можно с уверенностью сказать о цвете этих кружков? Сколько истинных предложений ты можешь составить?

Задача 20. В мешочке лежат 2 красных, 2 жёлтых и 2 зелёных кружка. Из мешочка наугад достали 4 кружка. Что можно сказать о цвете этих кружков? При ответе на вопрос задачи используй слова «возможно» или «обязательно».

Задача 21. В первой урне 5 белых и 10 черных шаров, во второй - 3 белых и 7 черных шаров. Из второй урны в первую переложили один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар - белый.

Гипотезы:

H_1 {переложен белый шар};

H_2 {переложен чёрный шар};

$P(H_1)=3/10$;

$P(H_2)=7/10$;

Событие A {вынули белый шар}.

P(A|H1)=6/16; P(A|H2)=5/16;

По формуле полной вероятности имеем

P (A) = P (H1)•P(A|H1)+ P (H2)•P(A|H2)=0,3•(6/16)+0,7•(5/16)=5,3/16=0,331.

Решение:

Возможны случаи:

1) A_1: вынули из второй урны белый шар. Вероятность этого события равна P (A1)=3/10

Тогда вероятность того что из первой урны вынут белый шар при условии A1 будет равна: P (B1)=6/16=3/8

2) A2: вынули из второй урны черный шар. Вероятность этого события равна P (A2)=7/10

Тогда вероятность того что из первой урны вынут белый шар при условии A1 будет равна: P (B1)=5/16

Искомая вероятность будет равна: P (A) =3/10·3/8+7/10·5/16=53/160.

Задача 22. В корзине содержится 6 черных и 5 белых шаров. Случайным образом вынимают 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них имеется 3 белых шара.

Решение. Перенумеруем все шары. Всего шаров 11. Исходом считаем выбор 5 любых шаров.

Количество всех исходов равно C_{11}^5 = 11!/(5!6!) = 11*10*9*8*7/(2*3*4*5) = 462.

Благоприятный исход - выбор 3 белых шаров и двух черных.

3 шара из 5 можно выбрать C_5^3 способами. А выбрать 2 черных шара из 6 можно C_6^2 способами.

Количество благоприятных исходов равно произведению

$C_5^3 * C_6^2$ = 5!/(3!*2!) * 6!/(2!*4!) = 5*4*3*2/(3*2*2) * 6*5*4*3*2/(2*4*3*2) = 10 * 15 = 150

P = 150 / 462 ≈ 0,325

Задача 23. Из урны содержащей, 6 белых шаров, 5 черных и 3 красных, достают наугад 4 шара. Найти вероятность, что среди вынутых шаров есть хотя бы по одному шару каждого цвета.

Решение. Всего шаров 6+5+3=14.

Исход - выбор четырех шаров из 14.

Всего исходов: C_{14}^4= 14!/(4!·10!) = 14·13·12·11/(2·3·4) = 1001.

Подсчитаем благоприятные исходы.

Чтобы вынуть хотя бы по одному шару разного цвета, надо вынуть

а) 2 белых+1 черный+1 красный. Это C_6^2·5·3 = 6!/(2! ·4!) ·5·3= 6·5/2 ·15=225 исходов

б) 1 белый+2 черных+1 красный. Это 6*C_5^2*3 = 18* 5!/(2!*4!) = 18* 5*4/2 = 180 исходов

в) 1 белый+1 черный+2 красных. Это 6*5*C_3^2 = 30* 3!/(2!*1!) = 30*3= 90 исходов.

Всего благоприятных исходов 225+180+90 = 495

Искомая вероятность P=495/1001 = 0,494505... ≈ 0,49.

Задача 24. В урне 5 белых и 4 черных шара. Из урны на угад вынимают два шара. Какова вероятность того, что это будет: а) два белых шара; б) два черных шара; в) один черный и один белый.

Решение.

а) Вероятность, что первый шар белый P=5/9

Осталось 4 белых, всего 8 шаров, вероятность вытащить второй белый = 4/8=1/2

P=5/9·1/2 = 5/18 =0,28

б) P=4/9 ·3/8 = 1/6

в) Вероятность, что первый черный, а второй белый P=4/9·5/8 = 5/18

Вероятность, что первый белый, а второй черный P=5/9·4/8 = 5/18

Окончательно, вероятность, что 1 белый и один черный P=5/18 + 5/18 = 10/18 = 5/9

Задача 25. В урне 2 белых и 8 черных шаров. Из урны извлекают 2 шара. Какова вероятность того, что эти шары черного цвета? одинаковые? разных цветов?

Решение. Всего шаров в первой урне 10.

1) Вероятность извлечь первым черный шар из первой урны равна 8/10, останется 9 шаров, из них 7 черных. Вероятность извлечь черны шар равна 7/9.

Вероятность того, что первый черный и второй черный P1=8/10*7/9= 28/45 = 0,6222..≈ 0,62

2) Аналогично находим, что оба шара белые.

P2 = 2/10 * 1/9 = 1/45 ≈ 0,02

Вероятность, что оба шара одного цвета (или оба черные или оба белые) равна

P = P1+P2 = 28/45+1/45 = 29/45 = 0,64

3) Вероятность, что первый белый, а второй черный P3= 2/10 * 8/9 = 8/45

Вероятность, что первый черный, а второй белый P4 = 8/10 * 2/9 = 8/45

P = P3+P4 = 16/45 = 0,35

Задача 26. Сколько разных соединений букв можно образовать, переставляя эти буквы: 1. В слове “мама”; 2. в слове параллелограмм. Записать соединения букв.

Решение 1. В слове “мама” буквы, при этом две буквы “м”, и две буквы “а”.

По формуле $P_n(m_1,m_2,\ldots,m_k)=n! \setminus m_1!\cdot m_2!\cdot\ldots\cdot m_k!$, где $n=m_1+m_2+\ldots+m_k$находим всех перестановок:

$$P_4(2, 2) = 4! \setminus 2!\cdot 2! = 6.$$

А сами перестановки будут такими: “мама”, “маам”, амам”, “аамм”, “амма”.

2. В слове “параллелограмм” 12 букв, из них букв “а” – 3, “г” – 1,“е” – 1, “л” – 2, “м” – 1, “о” – 1, “п” – 1, “р” – 2.

Всех перестановок будет: $P_{12}(3, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2)= 12! \setminus 3!\cdot(2!)^2\cdot(1!)^5 = 19958400.$

Задача 27. 6 ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров.

а) так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

б) если некоторые ящики могут оказаться пустыми)?

Решение. На 6 групп: первая группа для первого ящика, вторая – для второго и так далее. Таким образом, число вариантов раскладки шаров по ящикам равно числу способов расположения пяти перегородок. Перегородки могут стоять на любом из 19 мест (между 20 шарами – 19 промежутков).

Поэтому число их возможных расположений равно C_{19}^5.

б) Рассмотрим ряд из 25 предметов: 20 шаров и 5 перегородок, расположенных в произвольном порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует некоторому способу раскладки шаров по ящикам: в первый ящик попадают шары, расположенные левее первой перегородки, во второй – расположенные между первой и второй перегородками и т. д. (между какими-то перегородками шаров может и не быть). Поэтому число способов раскладки шаров по ящикам равно числу различных рядов из 20 шаров и 5 перегородок, т.е. равно C_{25}^5. Ответ: а) C_{19}^5; б) C_{25}^5.

Задача 28. В корзине 52 шара. Из них по 13 синих, 13 черных, 13 красных и 13 зеленых. Шары каждого цвета пронумерованы цифрами от 1 до 13. Из корзины поочередно достается 3 шара.

Вопросы:

1) Какова вероятность того, что из трех вытянутых шаров один будет иметь нумерацию"13"?

2) Какова вероятность того, что из трех вытянутых шаров один шар будет иметь номер "12 " и это будет максимальный номер?

3) Какова вероятность того, что три шара будут иметь "соседние" номера (например 6,4,5 или 4,5,6 или 6,5,4)

4) Какова вероятность того, что один из шаров будет иметь номер "13", а два других будут иметь одинаковый номер? (например 13,3,3 ... 5,13,5... 9,9,13 и т.п)

5) Какова вероятность того, что все три шара будут иметь один цвет?

1) $\frac{4}{52}+\frac{4}{51}+\frac{4}{50}-\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}\cdot\frac{2}{50}-\frac{4}{52}\cdot\frac{48}{51}\cdot\frac{3}{50}-\frac{48}{52}\cdot\frac{4}{51}\cdot\frac{3}{50}=0.222$

2) $\frac{4}{52}+\frac{4}{51}+\frac{4}{50}-\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}\cdot\frac{48}{50}-\frac{48}{52}\cdot\frac{4}{51}\cdot\frac{3}{50}-\frac{4}{52}\cdot\frac{44}{51}\cdot\frac{7}{50}$ -

$-\frac{44}{52}\cdot\frac{4}{51}\cdot\frac{4}{50}-\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{51}\cdot\frac{48}{50}-\frac{4}{52}\cdot\frac{47}{51}\cdot\frac{4}{50}=0.181$

5) $\frac{C_{13}^3\cdot C_{39}^0}{C_{52}^3}\cdot 4=0.0517$

Задача 29. Сколькими способами может одеться человек, комбинируя три рубашки, два галстука и две пары ботинок?

Решение. Пусть первая координата указывает вариант выбора рубашки, вторая - галстука, а третья - ботинок.

Запишем:

(1,1,1) (1,1,2) (1,2,1) (1,2,2) для комбинации с первой рубашкой

(2,1,1) (2,1,2) (2,2,1) (2,2,2) для комбинации со второй рубашкой

(3,1,1) (3,1,2) (3,2,1) (3,2,2) для комбинации с третьей рубашкой

Эта совокупность является множеством всех упорядоченных пар.

Теперь понятно, что правильным ответом служит число 3·2·2=12.

Задача 30. *Сколько решений имеет уравнение* $x_0+x_1+\ldots+x_9=4$ *в целых неотрицательных числах?*

Решение. Так как переменные $x_0,,x_1,,\ldots,$ x_9 могут принимать только целые неотрицательные значения, следовательно, у нас есть 10 переменных, и они могут принимать значения 0, 1, 2, 3 и 4. Представим, что у нас есть 10 коробок (это переменные), и мы должны разложить по этим коробкам 4 шара. Сколько шаров попадет в коробку, таково значение соответствующей переменной. Если у нас 10 коробок, следовательно, 10-1=9 внутренних перегородки. И 4 шара. Всего 13 мест. Нам надо расположить на этих 13 местах 4 шара. Число таких возможностей:

$$C_{13}^4 = C_{13}^9 = 10\cdot11\cdot12\cdot13 = 17160.$$

В общем случае, если нам нужно разложить n шаров в kкоробок, мы получаем комбинации из n шаров и k-1 внутренней перегородки. И число таких комбинаций равно числу сочетаний из n+k-1 по k-1.

$$C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n}$$

В этой задаче мы имели дело с сочетаниями с повторениями.

В урне находится K белых и $N-K$ чёрных шаров (всего N шаров). Из нее наудачу и без возвращения вынимают n шаров. Найти вероятность того, что будет выбрано ровно k белых и $n-k$ чёрных шаров По классическому определению вероятности, искомая вероятность находится по формуле гипергеометрической вероятности (см. пояснения тут):

$$P=C_K^k\cdot C_{N-K}^{n-k} \setminus C_N^n.(1)$$

Задача 31. В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара (событие A)?

Решение. В ящике всего 30 шаров. При данном испытании число всех равновозможных элементарных исходов будет C_{30}^6. Подсчитаем число элементарных исходов, благоприятствующих событию A. Три красных шара из 15 можно выбрать C_{15}^3 способами, два голубых шара из 9 можно выбрать C_9^2 способами, один зеленый из 6 – C_6^1 способами. Следовательно (в силу принципа произведения в комбинаторике), число исходов, благоприятствующих событию A, будет $m=C_{15}^3\cdot C_9^2\cdot C_6^1$. По формуле (1.2.1) находим искомую вероятность равна:

$$P(A)=C_{15}^3\cdot C_9^2\cdot C_6^1 \setminus C_{30}^6=24145$$

Задача 32. В ящике 15 шаров, из которых 5 голубых и 10 красных. Наугад выбирают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров 2 голубых.

Решение. Общее число элементарных исходов данного опыта равно числу сочетаний из 15 по 6, то есть $C_{15}^6=15! \setminus 6!\cdot9!=5005$.

Число благоприятных исходов равно произведению $C_5^2\cdot C_{10}^4=2100$.

Искомая вероятность определяется формулой: $P=C_5^2\cdot C_{10}^4 \setminus C_{15}^6=2100 \setminus 5005$.

Задача 33. В урне 3 белых и 4 чёрных шара. Из урны вынимаются два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Обозначим: A – событие, состоящее в появлении белых шаров; N – число способов вытащить 2 шара из 7: $N=C_7^2$; M – число способов вытащить 2 белых шара из имеющихся 3 белых шаров^: $M=C_3^2$.

Тогда вероятность того, что оба шара будут белыми: $P(A)=M \setminus N = C_3^2 \setminus C_7^2 = 1\setminus7$.

Задача 34. В ящике имеется 12 одинаковых шаров, отличающихся только цветом: 6 красных, 3 белых, 2 зелёных и 1 чёрный.

Какое наименьшее число шаров нужно взять из ящика наугад, чтобы среди вынутых шаров оказалось:

А) не менее 2 шаров одного (любого) цвета?

Б) хотя бы 3 шара одного цвета?

В) хотя бы один красный шар?

Г) хотя бы 2 белых шара?

Ответ: (а) 5 шаров, б) 8 шаров, в) 7 шаров, г) 11 шаров).

Задача 35. В ящике 3 чёрных и 5 белых шаров. Какое наименьшее число шаров нужно взять из ящика, чтобы среди вынутых шаров оказался:

А) хотя бы 1 чёрный,

Б) хотя бы 1 белый?

Ответ: (а) 6, б) 4)

Задача 36. В пакете перемешаны конфеты трёх сортов, не различимые на ощупь.

Какое наименьшее число конфет надо взять наугад из пакета, чтобы среди вынутых было:

А) хотя бы 2 конфеты одного сорта?

Б) хотя бы 3 конфеты одного сорта?

Ответ: (а) 4, б) 7).

Задача 37. Мои четыре пары перчаток одного фасона: две пары – чёрных, а две – серых, лежали на полке в тёмной комнате.

Какое наименьшее число перчаток я должен взять наугад, чтобы обеспечить себя парой перчаток одного цвета, безразлично какого?

Ответ: 5

Задача 38. В классе 35 учеников. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной и той же буквы?

Ответ: да.

6. В пионерском отряде 22 пионера. Можно ли утверждать, что среди пионеров найдутся хотя бы два ученика, имена которых начинаются с одной и той же буквы?

Ответ: нет.

7 **Задача 39** В школе 400 учеников. Почему среди учащихся этой школы обязательно найдутся хотя бы два ученика, родившихся в один и тот же день года?

Ответ: В году на более 366 дней, а учащихся – 400)

Задачи самостоятельного решения

1. В школе 735 учащихся. Почему можно утверждать, что по крайне мере 3 ученика должны отмечать день своего рождения в один и тот же день?

2. Почтовое отделение приняло у населения 200 посылок с яблоками. Известно, что ящик не может вмещать более 60 яблок. Докажите, что по крайне мере 4 посылки содержат одинаковое количество яблок.

3. У открытого окна стояли 3 вазы с розами. В белой вазе было в 2 раза, а в синей – в 3 раза больше цветов, чем в красной. Ветром опрокинуло 1 вазу, и она разбилась. Пять роз осыпалось. Остальные поставили поровну в синюю и вторую уцелевшую вазу.Какого цвета ваза разбилась?

Ответ: (красная, т. к. в белой было чётное число роз).

4. Аркадий, Борис, Владимир и Григорий перетягивали канат. Хотя и с трудом, но Борис мог перетянуть Аркадия и Григория вместе взятых. Если с одной стороны становились Борис и Аркадий, а с другой – Владимир и Григорий, то ни та , ни другая пара не могла перетянуть канат на свою сторону.
Но если Григорий и Аркадий менялись местами, Владимир и Аркадий легко побеждали противников.
Кто из них был самый сильный, кто занимал второе место, кто третье, кто самый слабый?

Ответ: (Самый сильный – Владимир, за ним идут Борис, Аркадий и Григорий).

5. У Алексеева и Смирнова по 2 сына, каждому из которых меньше 9 лет. В обеих семьях одному мальчику больше 5 лет, а другому меньше 5 лет. Известно, что Аркадий на 3 года моложе своего брата. Борис – самый старший среди мальчиков. Клим вдвое моложе младшего сына Алексеева. Дима на 5 лет старше младшего сына Смирнова.Назовите имена и фамилии мальчиков и укажите сколько лет каждому из них.

Ответ: (Борис Смирнов -8 лет, Дима Алексеев – 7 лет, Аркадий Алексеев – 4 года, Клим Смирнов – 2 года).

6. В пруду плавало 6 гусей и 8 уток. 7 птиц вышли на берег. Был ли среди них хотя бы 1 гусь? Хотя бы 1 утка?

7. В корзине лежат яблоки двух сортов. Наугад берут из этой корзины несколько яблок. Какое наименьшее количество яблок нужно взять, чтобы среди них оказались хотя бы два яблока одного сорта? (3 яблока)

8. В коробке лежат 4 шарика красного цвета и 5 шариков голубого цвета. Какое наименьшее количество шариков надо взять, не выбирая, чтобы среди них было 2 шарика разного цвета?

9. В мешочке 10 белых и 7 красных шариков. Если наугад достать 8 шариков , то попадётся ли:

а) хотя бы один красный;

б) хотя бы один белый?

10. В мешочке лежат 4 красных и 3 синих шарика. Сколько шариков нужно вынуть из мешочка наугад, чтобы среди них:

а) был 1 синий шарик;
б) были 2 шарика разного цвета,
в) не было ни одного красного шарика;
г) не было ни одного синего шарика?

11. В мешочке лежат 3 красных и 3 жёлтых шарика. Сколько шариков нужно вынуть из мешочка наугад, чтобы быть уверенным в том, что;

а) хотя бы один из вынутых шариков будет красным;
б) будут 2 шарика разного цвета;
в) не будет ни одного шарика красного цвета;
г) будут 2 жёлтых шарика?

12. В мешочке лежат 3 красных и 3 жёлтых кружка. Наугад достали 4 кружка. Что можно с уверенностью сказать о цвете этих кружков? Сколько истинных предложений ты можешь составить?

13. В мешочке лежат 2 красных, 2 жёлтых и 2 зелёных кружка. Из мешочка наугад достали 4 кружка. Что можно сказать о цвете этих кружков? При ответе на вопрос задачи используй слова «возможно» или «обязательно».

21. В мешочке 2 красных, 2 зелёных и 2 жёлтых кружка. Сколько кружков надо взять наугад, чтобы среди них обязательно были:

а) 2 кружка одного цвета;
б) 3 кружка одного цвета?

14. Из 21 м ткани получается 5 одинаковых платьев. Сколько платьев получится из 42 м такой же ткани?

Ответ: 10

15. В двух лодках разместилось 12 человек, в одной в 2 раза больше. Чем в другой. Сколько человек в каждой лодке?

Ответ: 8 человек, 4 человека.

16. Длина комнаты 5м, а ширина 3 м. Для настилки пола в этой комнате привезли пятиметровые доски шириной 20 см. Сколько досок пошло на постилку пола?

Ответ: 15 досок.

17. До конца суток осталось втрое меньше того времени, которое прошло от их начала. Который теперь час?

18. Сварили варенье из клюквы. При этом на каждые 2 стакана ягод брали 3 стакана сахарного песка. Сколько стаканов ягод взяли для варенья. Если всего израсходовали 12 стаканов сахара?

Ответ: 8 стаканов ягод.

19. На верхней полке 3 книги, а на нижней - 2. Сколько книг можно поставить на нижнюю полку. Чтобы на ней стало в 2 раза больше книг, чем на верхней полке?

Ответ: 4 книги.

20. В коробке лежат вперемешку катушки с красными и зелёными нитками. Какое наименьшее число катушек надо взять из коробки. Не глядя в неё, чтобы среди взятых катушек оказалось 2 катушки ниток одного цвета?

Ответ: 3 катушки.

21. На левой чашке весов гиря в 5 кг, а на правой- гиря в 1 кг и пакет муки. Левая чаша перетягивает правую. Если на правую чашу положить ещё гирю в 2 кг, то весы будут в равновесии. Сколько муки в пакете?

Ответ: 2 кг

22. На трёх скамейках сидели 20 человек. Когда на первую скамейку сели ещё 4 человека, на всех скамейках людей стало поровну. Сколько людей было на первой скамейке вначале?

Ответ: 4 человека.

23. Рабочий изготовлял в час на 5 деталей больше, чем его ученик. За два часа совместной работы они сделали 58 деталей. Сколько деталей за смену сделает каждый, если смена длится 6 часов?

Ответ: 102 детали, 72 детали.

24. Букет состоит из ромашек, фиалок и гвоздик. Ромашек - 4, фиалок -5, фиалок и гвоздик в три раза больше, чем ромашек. Сколько гвоздик в букете?

Ответ: 7 гвоздик.

25. На двух тарелках лежало 9 яиц. Когда с одной тарелки взяли одно яйцо, то на этой тарелке осталось яиц в три раза больше, чем на другой. Сколько яиц было на каждой тарелке?

Ответ: 2, 7 яиц.

26. Три курицы за три дня снесли три яйца. Сколько яиц снесут 12 кур за 12 дней, если они будут нести такое же количество яиц за один и тот же промежуток времени?

Ответ: 48 яиц.

27. В парке растут ели, липы и сосны. Сосен и лип вместе 340, сосен и елей растёт 280, елей и лип - 440. Поскольку в парке елей, сосен, лип?

Ответ: 90 сосен, 190 елей, 280 лип.

28. На трёх полках было 105 книг. Когда на первую полку поставили ещё 15 книг, то на всех полках книг стало поровну. Сколько книг было на первой полке?

Ответ: 25 книг.

29. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из двух деревень. Скорость одного пешехода 5 км\ч, а другого 4 км\ч. Какое расстояние будет между пешеходами через час после начала движения?

Ответ: 6 км, расстояние между деревнями 3 км

30. В трёх кусках 100 м. проволоки. В первом и втором кусках вместе - 72 м, а во втором и третьем - 84 м. Сколько метров проволоки в каждом куске?

Ответ: 16 м, 56 м, 28 м

31. В двух ящиках 84 яблока. Когда из первого ящика взяли 44 яблока, а из второго - 30 яблок, то в каждом ящике яблок осталось поровну. Сколько яблок было в каждом ящике вначале?

Ответ: 49, 35 яблок.

32. Магазин в первый день продал половину рулона ткани, во второй день - половину остатка, а в третий день - половину нового остатка и последние 5 метров. Сколько метров ткани было в рулоне?

Ответ: 40 метров.